Характеристики точности CE и LE

П.С. Титаров
«РАКУРС»

1. Введение

В некоторых странах принято точность планового положения точек местности задавать показателем, обозначаемым CE, а точность высот – величиной, обозначаемой LE. Иногда приходится сталкиваться с неверной трактовкой численных значений этих характеристик, когда эти значения приписывают среднеквадратическим ошибкам (СКО), которые также широко используются в качестве показателя точности координат точек. В данной статье описаны характеристики CE и LE и приведены (с выводом) формулы, связывающие их с СКО координат.

2. CE – показатель точности планового положения точек местности

CE (Circular Error) - это величина, которую с заданной вероятностью (обычно 90% либо 95%; соответствующие показатели обозначаются CE90 и CE95) не превзойдет отклонение характеризуемой оценки планового положения точки от её истинного планового положения. Иначе говоря, с заданной вероятностью точка окажется в круге радиусом CE, центр которого совпадает с истинным положением точки.

Получим соотношение, связывающее показатель CE с СКО плановых координат X, Y. Будем полагать, что источники систематических ошибок устранены, а случайные ошибки ΔX, ΔY плановых координат независимы, нормально распределены и дисперсии их одинаковы и равны σ^2; таким образом, математические ожидания $m_{\Delta X} = m_{\Delta Y} = 0$, дисперсии $\sigma^2_{\Delta X} = \sigma^2_{\Delta Y} = \sigma^2$, среднеквадратические отклонения $\sigma_{\Delta X} = \sigma_{\Delta Y} = \sigma$. В этом случае плотность распределения случайных ошибок плановых координат имеет вид:

$$f(\Delta X, \Delta Y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot e^{-\frac{\Delta X^2 + \Delta Y^2}{2\sigma^2}}$$

Найдем вероятность того, что плановое отклонение $\Delta R = (\Delta X^2 + \Delta Y^2)^{1/2}$ не превзойдет заданной величины R:

$$P(\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \le R) = \iint_{C_R} f(\Delta X, \Delta Y) d(\Delta X) d(\Delta Y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot \iint_{C_R} e^{-\frac{\Delta X^2 + \Delta Y^2}{2\sigma^2}} d(\Delta X) d(\Delta Y)$$

В последней формуле область интегрирования C_R представляет собой круг радиуса R с центром в начале отсчета. Перейдем к полярным координатам r и θ: $\Delta X = r \cdot \cos\theta$, $\Delta Y = r \cdot \sin\theta$. Якобиан перехода к полярным координатам равен r (см., например, [2]). Выражение для искомой вероятности в полярных координатах принимает вид:

$$P(r \le R) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r\, dr\, d\theta = \int_0^R e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} d\frac{r^2}{2\sigma^2} = 1 - e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}$$

Преобразуем полученную формулу:

$$\boxed{R = \sigma \cdot \sqrt{2\ln\frac{1}{1 - P(r \le R)}}}$$

Подставляя значение $P(r \le R)$=0.9, получаем CE90 = $\sigma \cdot (2\ln 10)^{½}$, откуда

$$\boxed{CE90 \approx 2.1460 \cdot \sigma}$$

Рассмотрим в качестве примера утверждение компании DigitalGlobe, поставляющей снимки, полученные ИСЗ QuickBird [7], что при использовании высокоточных модели рельефа и опорных точек для ортотрансформирования изображения уровня Basic, достижимая точность выходного ортоизображения составляет 2 м (при разрешении надирного снимка 61 см). Следует иметь в виду, что под точностью в данном случае подразумевается именно величина CE90; СКО планового положения составит примерно 0.9 м.

Широкое использование CE90 в американской геодезической литературе (в том числе и в описаниях продуктов дистанционного зондирования, получаемых с ИСЗ IKONOS [5], QuickBird [7],[8] и OrbView-3 [6]) обусловлено тем, что в США более полувека применялся стандарт NMAS (US National Map Accuracy Standards) [9], требования которого к плановой точности крупномасштабных карт *("…not more than 10 percent of the points tested shall be in error by more than…")* могут быть сформулированы с помощью CE90 в том случае, когда дисперсии погрешностей по обеим осям одинаковы (или близки). Если же это не так, и дисперсия погрешностей по разным направлениям существенно различается, вместо «круговой ошибки» необходимо использовать «эллиптическую». Детально этот вопрос рассмотрен в работе [4]. Заметим также, что выражение для «круговой ошибки» в [4] получено как частный случай «эллиптической» (отказ от рассмотрения случая, когда дисперсии погрешностей в различных направлениях неодинаковы, делает вышеприведенный вывод значительно проще).

В настоящее время показатель CE90 постепенно вытесняется величиной CE95; аналогично тому, как это было проделано выше для CE90, легко получить:

$$\boxed{CE95 \approx 2.4477 \cdot \sigma}$$

В частности, CE95 используется в современном стандарте США, посвященном точности пространственных данных [3].

3. LE – показатель точности высот точек местности

LE (Linear Error) - это величина, которую с заданной вероятностью (обычно 90% либо 95%; соответствующие показатели обозначаются LE90 и LE95) не превзойдет отклонение характеризуемой оценки высоты точки от истинного значения её высоты.

Конечно, говоря о LE как об оценке точности высот, имеют в виду её основное применение в геодезии и смежных науках; в общем случае этот показатель может использоваться для любых одномерных случайных величин, так же как показатель CE – для любых двумерных.

Получим соотношение, связывающее показатель точности LE и СКО высоты *Z*. Будем полагать, что источники систематических ошибок устранены, а случайные ошибки высот распределены нормально; таким образом, математическое ожидание высотной ошибки равно нулю, а величину дисперсии обозначим $\sigma^2_{\Delta Z}$.

В общем случае функция распределения $F(x)$ случайной величины X, нормально распределенной с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2, может быть выражена через нормальную функцию распределения $\Phi^*(t)$ [1] следующим образом: $F(x)=\Phi^*((x-m)/\sigma)$, где

$$\Phi^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{\tilde{t}^2}{2}} d\tilde{t}$$

Тогда

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi^*(\frac{\beta - m}{\sigma}) - \Phi^*(\frac{\alpha - m}{\sigma})$$

В нашем случае вероятность того, что величина высотной ошибки ΔZ не превзойдет по абсолютной величине заданного значения γ, равна

$$P(|\Delta Z| < \gamma) = P(-\gamma < \Delta Z < \gamma) = \Phi^*(\frac{\gamma}{\sigma_{\Delta Z}}) - \Phi^*(-\frac{\gamma}{\sigma_{\Delta Z}})$$

Принимая во внимание, что $\Phi^*(-t)= 1-\Phi^*(t)$, полученное выражение можно привести к виду:

$$P(|\Delta Z| < \gamma) = 2 \cdot \Phi^*(\frac{\gamma}{\sigma_{\Delta Z}}) - 1$$

Преобразуем эту формулу:

$$\boxed{\gamma = \sigma_{\Delta Z} \cdot \Phi^{*-1}(\frac{1 + P(|\Delta Z| < \gamma)}{2})}$$

Используя полученное выражение, определим соотношение между показателем точности LE90 и СКО $\sigma_{\Delta Z}$:

$$LE90 = \sigma_{\Delta Z} \cdot \Phi^{*-1}(\frac{1 + 0.9}{2}) = \sigma_{\Delta Z} \cdot \Phi^{*-1}(0.95)$$

Функция $\Phi^*(t)$ табулирована во многих учебниках по теории вероятностей и справочниках. Интерполируя значения из таблиц, приведенных в приложении 1 учебника [1], получим: $\Phi^{*-1}(0.95)=1.645$; следовательно,

$$\boxed{LE90 = 1.645 \cdot \sigma_{\Delta Z}}$$

Показатель LE90 своей распространенностью также обязан стандарту NMAS [9]; современный американский стандарт [3] использует показатель LE95, для которого аналогично LE90 получаем:

$$LE95 = \sigma_{\Delta Z} \cdot \Phi^{*-1}(\frac{1 + 0.95}{2}) = \sigma_{\Delta Z} \cdot \Phi^{*-1}(0.975)$$

Выбрав из приложения 1 учебника [1] значение $\Phi^{*-1}(0.975)=1.96$, имеем:

$$\boxed{LE95 = 1.96 \cdot \sigma_{\Delta Z}}$$

Таким же образом можно получить соотношение между СКО и LE для любого заданного значения вероятности.

4. Литература

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. – 6-е изд. Стер. – М.: Высш. шк., 1999. – 576 с.: ил.
2. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: Учеб. пособ. для вузов. – М.: Изд-во МФТИ, 1997. – 720 с.
3. Geospatial Positioning Accuracy Standards (FGDC-STD-007.3-1998). Part 3: National Standard for Spatial Data Accuracy. - Subcommittee for Base Cartographic Data, United States Federal Geographic Data Committee, Washington, D.C.
4. Error Theory as Applied to Mapping, Charting and Geodesy. – United States Defense Mapping Agency Technical Report 8400.1. – 2 May 1991.
5. IKONOS Imagery Products and Product Guide. Space Imaging LLC, 2002.
6. OrbView-3 Commercial Satellite Imagery Product Catalog. Rev. 5/17/04. ORBIMAGE Inc., 2004.
7. QuickBird Imagery Products. Frequently Asked Questions. Release Date: 14 March 2003. Digital Globe, Inc.
8. QuickBird Imagery Products. Product Guide. Revision: 3.5. Release Date: 14 March 2003. Digital Globe, Inc.
9. United States National Map Accuracy Standards: U.S. Bureau of the Budget, 1947, Washington, D.C.